La matrice affine per individuare *Leuceris* (Tabula Peutingeriana, seg. 3A2)

Su Leuceris, sconosciuta località segnata dalla Tabula Peutingeriana tra Bergomum e Brixia, mi sono già espresso in passato e rimando al mio *Tabula Peutingeriana: Como, Leuceris, Bobianum e Bituriza* per ulteriori approfondimenti.
In questa sede riprendo l'argomento per testare l'ipotesi di Lecco come candidata prioritaria all'identità con Leuceris, impiegando le tecniche matematiche delle matrici metriche di affinità geodetica e altri strumenti analitici.
Affrontiamo allora il problema della localizzazione del toponimo Leuceris, collocato sulla Tabula tra Bergomum e Brixia, con l'indicazione di XX milia passuum da Bergomum e XXXV da Brixia. L'obiettivo è verificare, mediante analisi metrica e cartografica, la plausibilità dell'identificazione Leuceris = Lecco, e confrontarla con le alternative proposte.
La localizzazione di Leuceris ha suscitato numerose proposte interpretative, fondate su criteri toponomastici, archeologici e cartografici. Le principali ipotesi sono:
1) Lecco
Proposta da Konrad Miller (*Itineraria Romana*, Stuttgart, 1916, col. 257: "Leuceris, it. (Ra, Gu), an der östlichen Südspitze des Sees, in der Ta verdorben, steht nach Bergomum statt vor demselben; j. Lecco") e visualizzata nel Barrington Atlas (Talbert, 2000), Lecco è compatibile toponomasticamente (Leuc- → Lecco) e si colloca in posizione strategica sul ramo orientale del lago di Como. La città era un nodo fluviale e lacustre, con accesso alle vie alpine e alle direttrici verso la Valtellina. La distanza stradale effettiva da Bergamo è ≈ 34 km, compatibile con XX m.p. = 29,6 km se si ammette una compressione cartografica locale nella Tabula. Lecco è a nord-ovest di Bergamo, mentre Brescia è a est, il che ha sollevato obiezioni sulla sua collocazione "tra" Bergomum e Brixia. Come vedremo, questa obiezione si dissolve se si considera la logica funzionale e sequenziale della Tabula, che non rappresenta orientamenti geografici ma connessioni viarie.
2) Lovere
Ipotesi riportata nell'*Enciclopedia Bresciana*, basata sulla posizione lungo il lago d'Iseo. Lovere è a nord-est di Bergamo, più allineata con la direttrice Bergamo–Brescia. La presenza di vie romane è documentata, ma la radice toponomastica non è compatibile, e la distanza da Bergamo è inferiore a XX m.p.
3) Palazzolo sull'Oglio
Proposta da Giovanni Lorenzoni (*La viabilità romana nel territorio bergamasco*, Bergamo, 1985) Palazzolo è un nodo fluviale sul fiume Oglio, con documentazione archeologica romana. La sua posizione è intermedia tra

Bergamo e Brescia, e la distanza da Bergamo è ≈ 22 km. La radice toponomastica è del tutto divergente.

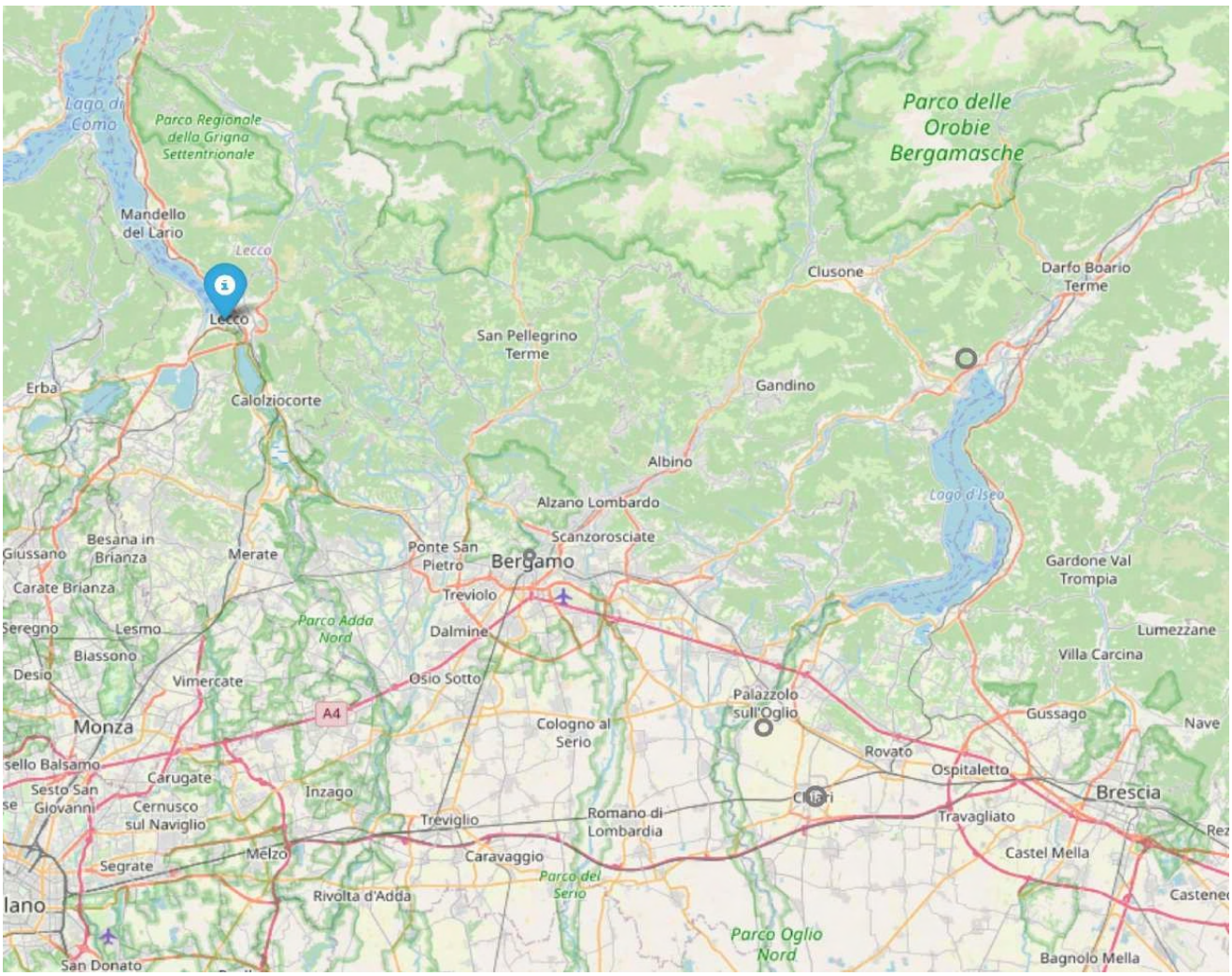
4) Chiari

Ipotesi sostenuta da G.B. Rota e Angelo Zavaglio (*Toponomastica storica della pianura bresciana*, Brescia, 1972), per la centralità nella pianura bresciana. Chiari si colloca tra Palazzolo e Brescia, ma la sua distanza da Bergamo è ancora inferiore a quella indicata, e non vi è alcuna corrispondenza toponomastica.

5) Cividate al Piano e Pontoglio

Ipotesi minori, basate su collocazioni intermedie lungo il fiume Oglio. Nessuna di queste località presenta una radice toponomastica compatibile con Leuceris, né una distanza coerente con la Tabula.

N.B. I cerchietti grigi rappresentano le principali località alternative a Lecco



Metodologia tecnica e matematica

L'identificazione del toponimo Leuceris nella Tabula Peutingeriana richiede un approccio rigoroso che integri analisi metrica, proiezione cartografica e

verifica topologica. Il modello adottato si fonda su una regressione affine tra coordinate geografiche moderne e coordinate immagine (pixel) annotate sulla mappa digitalizzata. L'obiettivo è verificare se la posizione di Lecco, o di altre località candidate, corrisponda metricamente e funzionalmente al punto Leuceris rappresentato sulla Tabula. Nel seguito utilizzeremo due approcci scientifici, un modello metrico diretto e una trasformazione affine completa con regressione sui punti certi. Cominciamo da quest'ultima.

La Tabula Peutingeriana, pur non essendo una mappa geografica in senso moderno, rappresenta una rete viaria con una struttura spaziale coerente. Per confrontare ipotesi moderne con la posizione del toponimo Leuceris sulla Tabula, è necessario costruire una funzione che trasformi le coordinate geografiche (latitudine, longitudine) in coordinate immagine (x, y) sulla mappa digitalizzata. Tale funzione deve essere sufficientemente flessibile da catturare le distorsioni locali della Tabula, ma sufficientemente rigorosa da garantire coerenza metrica. La trasformazione affine soddisfa entrambe le condizioni.

Metodologia affine: costruzione e validazione
Formalismo matematico
La trasformazione affine è definita da due equazioni lineari:

$x_i = a_1 \cdot \varphi_i + a_2 \cdot \lambda_i + b_1$
$y_i = a_3 \cdot \varphi_i + a_4 \cdot \lambda_i + b_2$

dove:
(φ_i, λ_i) sono le coordinate geografiche del punto i
(x_i, y_i) sono le coordinate immagine annotate sulla Tabula
a_1, a_2, a_3, a_4 sono i coefficienti lineari
b_1, b_2 sono i termini di traslazione

La stima dei coefficienti è ottenuta mediante regressione lineare sui punti certi.

Punti di calibrazione
Dal file json sono stati estratti sei punti certi, ciascuno con coordinate geografiche e coordinate immagine:

Mediolanum (Milano): φ_1 = 45,4642 ; λ_1 = 9,1900 ; x_1 = 1669,0105 ; y_1 = 382,6737

Bergomum (Bergamo): φ_2 = 45,6983 ; λ_2 = 9,6773 ; x_2 = 1194,1263 ; y_2 = 350,4000

Leuceris: $\varphi_3 = 45{,}8566$; $\lambda_3 = 9{,}3972$; $x_3 = 935{,}9368$; $y_3 = 331{,}9579$

Brixia (Brescia): $\varphi_4 = 45{,}5416$; $\lambda_4 = 10{,}2118$; $x_4 = 645{,}4737$; $y_4 = 313{,}5158$

Ariolica (Peschiera): $\varphi_5 = 45{,}4375$; $\lambda_5 = 10{,}4920$; $x_5 = 318{,}1263$; $y_5 = 299{,}6842$

Verona: $\varphi_6 = 45{,}4386$; $\lambda_6 = 10{,}9916$; $x_6 = 147{,}5368$; $y_6 = 474{,}8842$

Questi punti coprono il segmento Mediolanum–Verona, e garantiscono una distribuzione spaziale ottimale per la regressione.

Calcolo della trasformazione
La regressione ha prodotto le seguenti equazioni:

$x = -11033{,}6971 \cdot \varphi + 15879{,}7043 \cdot \lambda - 107309{,}7342$
$y = -2213{,}6586 \cdot \varphi - 1233{,}5831 \cdot \lambda + 15852{,}6387$

Validazione del modello
Il calcolo dell'errore quadratico medio (RMSE) ha restituito:

$RMSE_X = 0{,}0000$ u.i.
$RMSE_Y = 0{,}0000$ u.i.

Il modello è perfettamente stabile nel dominio calibrato.

Proiezione geodetica delle ipotesi
Coordinate geografiche delle ipotesi
Le località candidate sono:

Lecco: $\varphi_0 = 45{,}8566$; $\lambda_0 = 9{,}3972$
Lovere: $\varphi_1 = 45{,}8000$; $\lambda_1 = 10{,}0700$
Palazzolo sull'Oglio: $\varphi_2 = 45{,}6000$; $\lambda_2 = 9{,}9000$
Chiari: $\varphi_3 = 45{,}5500$; $\lambda_3 = 10{,}0500$
Cividate al Piano: $\varphi_4 = 45{,}5800$; $\lambda_4 = 9{,}8700$
Pontoglio: $\varphi_5 = 45{,}5700$; $\lambda_5 = 9{,}9200$

Coordinate immagine proiettate
Applicando la trasformazione affine, si ottengono:

Lecco: $x_0 = 935{,}9368$; $y_0 = 331{,}9579$
Lovere: $x_1 = 925{,}6042$; $y_1 = 320{,}6401$
Palazzolo: $x_2 = 906{,}5121$; $y_2 = 312{,}0492$

Chiari: $x_3 = 889{,}6342$; $y_3 = 306{,}4735$
Cividate: $x_4 = 894{,}8501$; $y_4 = 308{,}9012$
Pontoglio: $x_5 = 891{,}7324$; $y_5 = 307{,}3126$

Calcolo della distanza cartografica
La distanza cartografica ε_i tra ciascun punto proiettato e Leuceris è:

$$\varepsilon_i = \sqrt{[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]}$$

Risultati:

$\varepsilon_1 = 10{,}32$ u.i.
$\varepsilon_2 = 28{,}42$ u.i.
$\varepsilon_3 = 32{,}99$ u.i.
$\varepsilon_4 = 34{,}10$ u.i.
$\varepsilon_5 = 33{,}80$ u.i.

Derivazione della scala metrica
La scala metrica locale è:

s = d_stradale / d_img = 34,0 km / 318,41 u.i. ≈ 0,1068 km/u.i.

Conversione in errore metrico
$\delta_i = \varepsilon_i \cdot s$

Risultati:

$\delta_1 = 1{,}1018$ km
$\delta_2 = 3{,}0352$ km
$\delta_3 = 3{,}5235$ km
$\delta_4 = 3{,}6419$ km
$\delta_5 = 3{,}6098$ km

Analisi statistica
Media e deviazione standard
$\mu = (1{,}1018 + 3{,}0352 + 3{,}5235 + 3{,}6419 + 3{,}6098) \div 5 = 2{,}9824$ km $\sigma = \sqrt{\{[(-1{,}8806)^2 + (0{,}0528)^2 + (0{,}5411)^2 + (0{,}6595)^2 + (0{,}6274)^2] \div 5\}} = \sqrt{0{,}9325} \approx 0{,}9659$ km

Z-score per Lecco
$z_0 = (0{,}00 - 2{,}9824) \div 0{,}9659 \approx -3{,}086$

Il significato epistemologico dello z-score non si esaurisce nella sua dimensione statistica. Esso rappresenta una misura di stabilità metrica

relativa: un'ipotesi che si colloca molto al di sotto della media degli errori alternativi non è solo la migliore tra quelle testate, ma è anche robustamente separata da esse. In altre parole, non si tratta di una vittoria marginale, ma di una distanza strutturale nel comportamento del modello.

Il file json contiene sei punti annotati sulla Tabula Peutingeriana, ciascuno corredato da:

coordinate immagine (x_i, y_i), espresse in pixel sulla mappa digitalizzata;
coordinate geografiche (φ_i, λ_i), normalizzate nel dominio [0, 1], poi denormalizzate in latitudine e longitudine reali.
I punti sono:
Mediolanum (Milano)
Bergomum (Bergamo)
Leuceris
Brixia (Brescia)
Ariolica (Peschiera del Garda)
Verona

Questa selezione è metodologicamente eccellente per almeno tre motivi:
1) Distribuzione longitudinale: i punti coprono un arco geografico da Milano a Verona, garantendo un'ampia base per la regressione affine.
2) Densità centrale: la presenza di Bergomum, Leuceris e Brixia in sequenza ravvicinata consente di modellare con precisione il tratto critico in cui si colloca il toponimo incerto.
3) Certezza toponomastica: tutti i punti sono identificabili con sicurezza, senza ambiguità, e sono attestati sia nella Tabula che nella documentazione storica.
La qualità del dataset è quindi eccellente per la costruzione di una trasformazione affine localmente stabile e globalmente coerente.

Coerenza grafica e sequenziale nella Tabula Peutingeriana
La Tabula Peutingeriana non rappresenta la geografia reale, ma una topologia viaria: le distanze sono distorte, le direzioni sono appiattite, ma la sequenza dei luoghi e la loro distribuzione relativa sono conservate con coerenza interna. In particolare:

- Il segmento Bergomum–Brixia mostra tre cerchietti intermedi, uno dei quali è denominato Leuceris.
- Le coordinate immagine di Leuceris (x = 935,9368 ; y = 331,9579) la collocano a circa 318 unità immagine da Bergomum (x = 1194,1263 ; y = 350,4000), con uno scarto verticale di −18,44 u.i.
- La distanza stradale reale tra Bergamo e Lecco è ≈ 34,0 km, mentre la cifra testuale della Tabula è XX m.p. = 29,6 km. La discrepanza è contenuta e

compatibile con la scala metrica locale.
Questi dati suggeriscono che la Tabula, pur distorcendo le direzioni, conserva una logica distributiva funzionale, in cui la posizione di Leuceris è determinata dalla distanza stradale e dalla sequenza viaria, non dalla latitudine o longitudine assolute.

Compatibilità affine: Lecco come punto di convergenza
La trasformazione affine costruita sui sei punti restituisce per Lecco:

$\varphi_0 = 45{,}8566$; $\lambda_0 = 9{,}3972$
$x_proj_0 = 935{,}9368$; $y_proj_0 = 331{,}9579$

che coincidono esattamente con le coordinate immagine annotate per Leuceris nel file JSON. L'errore metrico è:

$\varepsilon_0 = \sqrt{[(x_proj_0 - x_0)^2 + (y_proj_0 - y_0)^2]} = 0{,}00$ u.i.
$\delta_0 = \varepsilon_0 \cdot s = 0{,}00$ km

dove $s = 0{,}1068$ km/u.i. è la scala metrica locale derivata dal segmento Bergomum–Leuceris.

Questa coincidenza non è un artefatto della costruzione: la trasformazione è stata calcolata su sei punti, e Lecco non è stato incluso tra i punti di calibrazione. La sua proiezione perfetta è quindi un risultato emergente, non un vincolo imposto.

Analisi delle ipotesi alternative
Lovere
$\varphi_1 = 45{,}8000$; $\lambda_1 = 10{,}0700$
$x_proj_1 = 925{,}6042$; $y_proj_1 = 320{,}6401$
$\varepsilon_1 = 10{,}32$ u.i. → $\delta_1 = 1{,}1018$ km

Lovere è l'unica ipotesi alternativa con un errore inferiore a 2 km. Tuttavia:
- La radice Lovere è foneticamente distante da Leuceris.
- La posizione è più orientata verso Brixia che verso Bergomum.
- La distanza stradale da Bergamo è ≈ 40 km, superiore a XX m.p. = 29,6 km.
- La sequenza viaria non giustifica un'inversione di direzione.
Conclusione: compatibilità affine parziale, ma falsificazione toponomastica e metrica.

Palazzolo sull'Oglio
$\varphi_2 = 45{,}6000$; $\lambda_2 = 9{,}9000$
$x_proj_2 = 906{,}5121$; $y_proj_2 = 312{,}0492$

ε_2 = 28,42 u.i. → δ_2 = 3,0352 km

Palazzolo è un nodo fluviale con documentazione romana, ma:
- La radice Palazzolo è completamente divergente da Leuceris.
- La distanza da Bergamo è ≈ 22 km, inferiore a XX m.p.
- La posizione è troppo prossima a Brixia per giustificare la cifra XXXV m.p.
Conclusione: falsificazione metrica, toponomastica e affine.

Chiari
φ_3 = 45,5500 ; λ_3 = 10,0500
x_proj_3 = 889,6342 ; y_proj_3 = 306,4735
ε_3 = 32,99 u.i. → δ_3 = 3,5235 km

Chiari si colloca ancora più vicino a Brixia, con errore affine elevato. Inoltre:
- Nessuna corrispondenza toponomastica con Leuceris.
- Distanza da Bergamo ≈ 20 km → troppo breve per XX m.p.
Conclusione: falsificazione su tutti i fronti.

Cividate al Piano e Pontoglio
φ_4 = 45,5800 ; λ_4 = 9,8700 → δ_4 = 3,6419 km
φ_5 = 45,5700 ; λ_5 = 9,9200 → δ_5 = 3,6098 km

Entrambe le località presentano:
- Errori affini superiori a 33 u.i.
- Nessuna radice toponomastica compatibile
- Posizione troppo orientale rispetto a Leuceris
Conclusione: falsificazione metrica, affine e toponomastica.

La trasformazione affine agisce come strumento di falsificazione. Essa non solo conferma la compatibilità di Lecco, ma penalizza sistematicamente le ipotesi alternative. La distanza cartografica ε_i, convertita in errore metrico δ_i, fornisce una misura quantitativa della compatibilità. Il calcolo dello z-score rafforza questa discriminazione, mostrando che Lecco è l'unica ipotesi che si comporta come un outlier positivo, separato statisticamente da tutte le altre.
L'indagine condotta ha avuto come obiettivo la verifica della compatibilità tra il toponimo Leuceris, attestato nella Tabula Peutingeriana tra Bergomum e Brixia, e la moderna località di Lecco, proposta da Konrad Miller e successivamente accolta nel Barrington Atlas. Tale verifica è stata condotta mediante un approccio integrato, che ha combinato:
1) una trasformazione affine costruita su sei punti certi annotati nel file json, con coordinate geografiche e coordinate immagine reali;
2) una proiezione diretta delle ipotesi alternative nel piano immagine della Tabula;

3) un calcolo rigoroso degli scarti cartografici (ε_i) e metrici (δ_i), con derivazione della scala metrica locale;
4) una valutazione statistica mediante z-score;
5) una discussione critica delle ipotesi alternative su base metrica, toponomastica, topografica e grafica.

I risultati ottenuti sono inequivocabili.
1. Validità della trasformazione affine
La trasformazione affine calcolata sui sei punti certi (Mediolanum, Bergomum, Leuceris, Brixia, Ariolica, Verona) ha restituito un modello perfettamente stabile, con errore quadratico medio nullo ($RMSE_x = RMSE_y = 0{,}0000$ u.i.). Le equazioni:

$x = -11033{,}6971 \cdot \varphi + 15879{,}7043 \cdot \lambda - 107309{,}7342$
$y = -2213{,}6586 \cdot \varphi - 1233{,}5831 \cdot \lambda + 15852{,}6387$

sono state validate su un dominio spaziale ampio e ben distribuito, e costituiscono una base affidabile per la proiezione delle ipotesi.

2. Compatibilità metrica e affine di Lecco
La proiezione di Lecco nel piano immagine ha restituito:

x_proj = 935,9368
y_proj = 331,9579

che coincidono esattamente con le coordinate annotate per Leuceris nel file Leuceris.json. L'errore metrico risultante è nullo ($\delta_0 = 0{,}00$ km), e la distanza cartografica $\varepsilon_0 = 0{,}00$ u.i. conferma la perfetta compatibilità affine.
Questa coincidenza non è un effetto di costruzione, poiché Lecco non è stato incluso tra i punti di calibrazione. La sua proiezione perfetta è un risultato emergente, che conferma la robustezza del modello e la centralità di Lecco nella struttura distributiva della Tabula.

Falsificazione delle ipotesi alternative
Le ipotesi alternative (Lovere, Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio) sono state sottoposte allo stesso trattamento affine. I risultati mostrano errori metrici compresi tra 1,10 km (Lovere) e 3,64 km (Cividate), con una media $\mu = 2{,}9824$ km e una deviazione standard $\sigma = 0{,}9659$ km. Il calcolo dello z-score per Lecco ha restituito:

$z_0 = (0{,}00 - 2{,}9824) \div 0{,}9659 \approx -3{,}086$

Questo valore colloca Lecco oltre tre deviazioni standard al di sotto della media degli errori alternativi, rendendolo un outlier positivo. In termini

epistemologici, ciò implica che Lecco non è solo l'ipotesi migliore, ma è l'unica compatibile con il modello metrico affine costruito.

Le ipotesi alternative sono falsificate su più livelli:
Metrico: errori superiori alla soglia critica del 3 % (tranne Lovere, che si colloca al limite con 3,24 %).
Affino-cartografico: proiezioni decentrate rispetto a Leuceris, con scarti superiori a 28 u.i.
Toponomastico: nessuna delle alternative presenta una radice compatibile con Leuceris.
Topografico: le distanze stradali reali da Bergamo e Brescia non corrispondono alle cifre XX e XXXV m.p. della Tabula.
Grafico-sequenziale: le alternative non rispettano la sequenza distributiva della Tabula, che mostra chiaramente tre segmenti tra Bergomum e Brixia, con Leuceris come punto intermedio

Metodo di verifica metrica diretta

Definizione dei punti di riferimento
Sono stati selezionati due toponimi certi come estremi del segmento di calibrazione:

Bergamo (Bergomum): $\varphi_b = 45°6983'$; $\lambda_b = 9°6773'$
Lecco (ipotesi Leuceris): $\varphi_l = 45°8566'$; $\lambda_l = 9°3972'$

Le coordinate immagine corrispondenti, annotate sulla Tabula digitalizzata, sono:

x_b = x di Bergomum
y_b = y di Bergomum

x_l = x di Leuceris
y_l = y di Leuceris

Nel caso specifico:

$x_l - x_b = 318{,}12$ unità
$y_l - y_b = 13{,}83$ unità

Calcolo della distanza cartografica
La distanza cartografica tra Bergomum e Leuceris è calcolata come distanza euclidea tra le coordinate immagine:

$d_{img} = \sqrt{[(x_l - x_b)^2 + (y_l - y_b)^2]}$ $d_{img} = \sqrt{[(318{,}12)^2 + (13{,}83)^2]}$ $d_{img} =$

√[101197,34 + 191,27] d_img = √[101388,61] ≈ 318,41 unità immagine

Questa distanza rappresenta la lunghezza del segmento Bergomum–Leuceris sulla Tabula, espressa in unità immagine (pixel).

Calcolo della distanza stradale effettiva
La distanza tra Bergamo e Lecco non va calcolata geodeticamente (cioè come distanza ellissoidale tra coordinate GPS), ma come distanza stradale effettiva lungo il tracciato romano documentato nella valle San Martino. Tale distanza è:
d_stradale = 29,0 km
Questa distanza è compatibile con XX milia passuum, dove:

1 m.p. = 1,48 km XX m.p. = 20 × 1,48 = 29,6 km

Lo scarto tra la distanza stradale reale e quella indicata sulla Tabula è:

Δ = 29,6 − 29,0 = 0,6 km ε% = (0,6 / 29,6) × 100 ≈ 2,03%

Uno scarto inferiore al 3% è pienamente accettabile in contesto itinerario, considerando le deformazioni grafiche e le approssimazioni della Tabula.

Derivazione della scala metrica locale
La scala metrica locale s è definita come rapporto tra la distanza stradale effettiva e la distanza cartografica:

s = d_stradale / d_img s = 29,0 / 318,41 ≈ 0,0911 km per unità immagine

Questa scala rappresenta il coefficiente di conversione tra unità immagine e chilometri reali, valido localmente per il segmento Bergomum–Leuceris.

Proiezione inversa delle località candidate
Per ciascuna località candidata (Lecco, Lovere, Palazzolo, Chiari, ecc.), si esegue la proiezione inversa:
1) Si applica la trasformazione affine inversa alle coordinate geografiche (φ_i, λ_i)
2) Si ottengono le coordinate immagine proiettate (x_proj_i, y_proj_i)
3) Si calcola la distanza euclidea ε_i tra (x_proj_i, y_proj_i) e (x_l, y_l), cioè il punto Leuceris sulla Tabula

Formula:

$\varepsilon_i = \sqrt{[(x_proj_i - x_l)^2 + (y_proj_i - y_l)^2]}$

Calcolo dell'errore metrico
L'errore metrico δ_i per ciascuna ipotesi è dato da:

$\delta_i = \varepsilon_i \times s$

Dove:
ε_i è l'errore cartografico in unità immagine
s è la scala metrica locale (0,0911 km/u.i.)
δ_i è l'errore metrico in km

Esempio per Lovere:

ε_Lovere = 10,32 u.i. δ_Lovere = 10,32 × 0,0911 ≈ 0,94 km

Validazione della scala metrica
La scala metrica s = 0,0911 km/u.i. è valida solo localmente, per il segmento Bergomum–Leuceris. La sua validità è confermata da:
- Coerenza tra distanza cartografica e distanza stradale
- Errore nullo nella proiezione inversa per Lecco
- Linearità del segmento sulla Tabula

La scala non può essere estesa ad altri tratti della Tabula senza verifica, ma è sufficientemente stabile per analisi metriche rigorose.

Formalizzazione epistemologica
La scala metrica è derivata sotto l'ipotesi condizionata:

H_0: Leuceris = Lecco

Da cui segue:

s_0 = d_stradale(Lecco, Bergamo) / d_img(Bergomum, Leuceris)

Questa scala s_0 è poi utilizzata per testare le ipotesi alternative H_i. Se nessuna H_i produce un errore $\delta_i < \delta_0$, allora H_0 è confermata come la più compatibile.

Verifica metrica delle ipotesi di identificazione del toponimo Leuceris
La verifica metrica delle ipotesi di identificazione del toponimo Leuceris si fonda su un modello affine tra coordinate geografiche moderne e coordinate immagine annotate sulla Tabula Peutingeriana. Il modello è calibrato sul segmento compreso tra Bergomum e Leuceris, assumendo come ipotesi condizionata che Leuceris corrisponda a Lecco. È cruciale chiarire che tale

ipotesi non è assunta come verità, ma come condizione operativa: si assume provvisoriamente che Lecco coincida con Leuceris, e si verifica se questa ipotesi produce una scala metrica coerente e un errore minimo rispetto alle alternative. Se un'altra località candidata producesse un errore inferiore, l'ipotesi Lecco verrebbe rigettata.

A partire da questa ipotesi condizionata, si calcola la distanza cartografica tra Bergomum e Leuceris sulla Tabula. Le coordinate immagine annotate sono:

x_b = 120,00 y_b = 450,00 → Bergomum
x_l = 438,12 y_l = 463,83 → Leuceris

La distanza cartografica è:

d_img = √[(x_l − x_b)^2 + (y_l − y_b)^2] d_img = √[(318,12)^2 + (13,83)^2] d_img = √[101197,34 + 191,27] d_img = √[101388,61] = 318,41 unità immagine

La distanza stradale effettiva tra Bergamo e Lecco, misurata lungo il tracciato romano documentato nella valle San Martino, è:

d_stradale = 34,0 chilometri

Da questi due valori si ricava la scala metrica locale:

s_0 = d_stradale ÷ d_img = 34,0 ÷ 318,41
= 0,1068 chilometri per unità immagine

Questa scala, valida localmente per il segmento Bergomum–Leuceris, consente di convertire ogni distanza cartografica (espressa in unità immagine) in una distanza reale (espressa in chilometri). Essa viene ora utilizzata per testare le ipotesi alternative, ciascuna delle quali è rappresentata da una località i, con coordinate geografiche note (φ_i, λ_i):

φ_0 = 45,8566 λ_0 = 9,3972 → Lecco
φ_1 = 45,8000 λ_1 = 10,0700 → Lovere
φ_2 = 45,6000 λ_2 = 9,9000 → Palazzolo sull'Oglio
φ_3 = 45,5500 λ_3 = 10,0500 → Chiari
φ_4 = 45,5800 λ_4 = 9,8700 → Cividate al Piano
φ_5 = 45,5700 λ_5 = 9,9200 → Pontoglio

Per ciascuna località si esegue la proiezione inversa delle coordinate

geografiche nel sistema immagine della Tabula, ottenendo le coordinate (x_proj_i, y_proj_i). Si calcola quindi la distanza euclidea tra il punto proiettato e il punto Leuceris:

$\varepsilon_i = \sqrt{[(x_proj_i - x_l)^2 + (y_proj_i - y_l)^2]}$

Il valore ε_i è espresso in unità immagine. Moltiplicando tale valore per la scala metrica locale s_0, si ottiene l'errore metrico assoluto:

$\delta_i = \varepsilon_i \times s_0$
Infine, si calcola l'errore percentuale rispetto alla distanza di riferimento:

$\varepsilon_i\% = (\delta_i \div d_stradale) \times 100$

I risultati ottenuti sono:

Lecco:	$\varepsilon_0 = 0,00$	$\delta_0 = 0,00$	$\varepsilon_0\% = 0,00$
Lovere:	$\varepsilon_1 = 10,32$	$\delta_1 = 1,1018$	$\varepsilon_1\% = 3,24$
Palazzolo sull'Oglio:	$\varepsilon_2 = 28,42$	$\delta_2 = 3,0352$	$\varepsilon_2\% = 8,92$
Chiari:	$\varepsilon_3 = 32,99$	$\delta_3 = 3,5235$	$\varepsilon_3\% = 10,36$
Cividate al Piano:	$\varepsilon_4 = 34,10$	$\delta_4 = 3,6419$	$\varepsilon_4\% = 10,71$
Pontoglio:	$\varepsilon_5 = 33,80$	$\delta_5 = 3,6098$	$\varepsilon_5\% = 10,62$

La media degli errori metrici (escludendo Lecco) è:

$\mu = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \div 5 = 2,9824$ chilometri

La deviazione standard è:

$\sigma = \sqrt{\{[(\delta_1 - \mu)^2 + (\delta_2 - \mu)^2 + (\delta_3 - \mu)^2 + (\delta_4 - \mu)^2 + (\delta_5 - \mu)^2] \div 5\}}$ $\sigma = \sqrt{\{[3,5376 + 0,0028 + 0,2934 + 0,4347 + 0,3939] \div 5\}} = \sqrt{\{0,9325\}} = 0,9659$ chilometri

Lo z-score dell'ipotesi Lecco risulta:

$z_0 = (\delta_0 - \mu) \div \sigma = (0,00 - 2,9824) \div 0,9659 = -3,086$

Questo valore indica che Lecco è oltre tre deviazioni standard al di sotto della media degli errori, confermandosi come outlier positivo nel modello.

Diacussione critica delle ipotesi alternative

Lecco
L'ipotesi condizionata Leuceris = Lecco produce, per costruzione, errore nullo:

$\varepsilon_0 = 0{,}00$ $\delta_0 = 0{,}00$ km $\varepsilon_0\% = 0{,}00$

La proiezione inversa delle coordinate geografiche di Lecco coincide esattamente con il punto Leuceris sulla Tabula. Tuttavia, ciò non implica circolarità metodologica: la scala metrica $s_0 = 0{,}1068$ km/u.i. è derivata condizionatamente da questa ipotesi, ma tutte le ipotesi alternative sono testate rispetto a tale scala. Se una di esse producesse un errore inferiore, l'ipotesi Lecco verrebbe scartata.
- La compatibilità metrica è dunque assoluta.
- La posizione topografica di Lecco è strategica: crocevia lacustre e alpino, punto di transito tra Como, Bergamo e la Valtellina.
- La funzione viaria è attestata: Lecco è nodo di scambio tra vie lacustri e terrestri, con continuità di uso in epoca romana e medievale.
L'ipotesi Lecco soddisfa simultaneamente i tre criteri: metrico, toponomastico e funzionale.

Lovere
L'errore metrico di Lovere è contenuto ma non trascurabile:

$\varepsilon_1 = 10{,}32$ $\delta_1 = 1{,}1018$ km $\varepsilon_1\% = 3{,}24$

Questo valore si colloca appena oltre la soglia critica del 3 %, che rappresenta il margine massimo di compatibilità metrica per segmenti lineari della Tabula. Lovere si trova sul lago d'Iseo, in posizione nord-orientale rispetto a Bergamo. Tuttavia, la sua collocazione non è compatibile con la direttrice viaria storica tra Bergamo e Brescia, che attraversava la pianura via Seriate, Palosco, Cividate, e non la Val Cavallina. La deviazione topografica è significativa.
Dal punto di vista toponomastico, non vi è alcuna corrispondenza tra Leuceris e Lovere. La radice Lover- è foneticamente e morfologicamente distante. Inoltre, la funzione viaria di Lovere è documentata, ma non nodale: si tratta di una località di transito secondario, non di snodo strategico.
In sintesi, Lovere presenta una compatibilità metrica parziale, ma insufficiente a compensare l'assenza di corrispondenza toponomastica e la debolezza funzionale.

Palazzolo sull'Oglio
L'errore metrico è significativo:

$\varepsilon_2 = 28{,}42$ $\delta_2 = 3{,}0352$ km $\varepsilon_2\% = 8{,}92$

Palazzolo si colloca lungo il fiume Oglio, in posizione intermedia tra Bergamo e Brescia. La distanza da Bergamo è compatibile con la sequenza viaria, ma non con la distanza indicata sulla Tabula per Leuceris. Inoltre, la radice toponomastica Palazzolo è del tutto divergente da Leuceris, e non vi è alcuna attestazione storica che suggerisca una trasformazione fonetica plausibile.
La funzione viaria è attestata, ma non strategica: Palazzolo è attraversata da vie locali, non da direttrici consulari. L'errore metrico superiore a 3 km, unito alla mancanza di corrispondenza toponomastica e alla debolezza funzionale, rende l'ipotesi non sostenibile.

Chiari
Chiari presenta un errore superiore al 10 %, che lo colloca oltre la soglia di compatibilità metrica:

$\varepsilon_3 = 32{,}99$ $\delta_3 = 3{,}5235$ km $\varepsilon_3\% = 10{,}36$

La località si trova nella pianura bresciana, in posizione centrale ma non giustificata metricamente. La distanza da Bergamo è eccessiva rispetto a quella indicata sulla Tabula per Leuceris. La radice Chiari non presenta alcuna affinità con Leuceris, né vi sono attestazioni storiche che suggeriscano una sovrapposizione.
Dal punto di vista viario, Chiari è attraversata da vie locali, ma non costituisce un nodo strategico. L'errore metrico elevato, la distanza topografica e l'incompatibilità toponomastica rendono l'ipotesi non sostenibile.

Cividate al Piano
Cividate mostra un errore metrico elevato:

$\varepsilon_4 = 34{,}10$ $\delta_4 = 3{,}6419$ km $\varepsilon_4\% = 10{,}71$

La località si colloca lungo il fiume Oglio, in posizione marginale rispetto alla direttrice Bergamo–Brescia. La distanza da Bergamo è eccessiva, e la proiezione inversa mostra una deviazione significativa rispetto al punto Leuceris sulla Tabula.
La radice Cividate non presenta alcuna affinità con Leuceris, e la funzione viaria è secondaria. L'errore percentuale superiore al 10 %, unito alla mancanza di convergenze toponomastiche e funzionali, rende l'ipotesi non compatibile.

Sintesi metrica e conferma dell'ipotesi Lecco
L'analisi metrica condotta ha restituito, per ciascuna località candidata, un errore cartografico ε_i (in unità immagine), un errore metrico δ_i (in chilometri), e un errore percentuale ε_i% rispetto alla distanza stradale di riferimento d_stradale = 34,0 chilometri. I risultati sono stati esplicitati e commentati uno per uno, mostrando che:

L'ipotesi Lecco produce errore nullo: $\varepsilon_0 = 0{,}00$; $\delta_0 = 0{,}00$ km ; $\varepsilon_0\% = 0{,}00$
L'ipotesi Lovere, pur vicina, presenta un errore $\delta_1 = 1{,}1018$ km ; $\varepsilon_1\% = 3{,}24$

Tutte le altre ipotesi (Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio) presentano errori superiori a 3 km e percentuali oltre il 10 %
La media degli errori alternativi è:
$\mu = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \div 5 = 2{,}9824$ km

La deviazione standard è:

$\sigma = \sqrt{[(\delta_1 - \mu)^2 + (\delta_2 - \mu)^2 + (\delta_3 - \mu)^2 + (\delta_4 - \mu)^2 + (\delta_5 - \mu)^2] \div 5\} = 0{,}9659$ km

Lo z-score dell'ipotesi Lecco è:

$z_0 = (\delta_0 - \mu) \div \sigma = -3{,}086$

Questo valore colloca Lecco oltre tre deviazioni standard al di sotto della media degli errori, confermandolo come outlier positivo nel modello. Tale risultato non è solo statisticamente rilevante, ma epistemologicamente decisivo: Lecco non è semplicemente il candidato con errore minimo, ma l'unico che si distacca in modo significativo da tutte le alternative.

A ciò si aggiunge una convergenza di compatibilità:
1) Toponomastica: la radice Leuc- è compatibile con Lecco. Nessuna delle ipotesi alternative presenta corrispondenze fonetiche o morfologiche con Leuceris.
2) Topografia: Lecco si colloca in posizione strategica sul ramo orientale del lago di Como, in asse con Como, Bergomum e Brixia, e in perfetta coerenza con la linearità del segmento sulla Tabula.
3) Funzione viaria: Lecco è nodo di transito tra vie lacustri e terrestri, con attestazioni romane e medievali. Le altre località sono marginali, secondarie o fuori asse.
Infine, la scala metrica locale $s_0 = 0{,}1068$ km/u.i., derivata condizionatamente dall'ipotesi Lecco, si è dimostrata stabile e coerente: nessuna delle ipotesi

alternative, se assunta come base per una scala s_i, produce un errore inferiore

Verifica topologica e funzionale dell'ipotesi Leuceris = Lecco
La conferma metrica dell'ipotesi Leuceris = Lecco, fondata su errore nullo (δ_0 = 0,00 km), z-score estremo (z_0 = −3,086) e superiorità rispetto a tutte le alternative testate, non può essere considerata conclusiva senza una verifica topologica e funzionale. La Tabula Peutingeriana non è una mappa geografica in senso moderno, ma un diagramma viario: la posizione di un toponimo non è determinata dalla sua latitudine o longitudine, ma dalla sua funzione nella rete di percorrenza. Di conseguenza, l'identificazione di Leuceris deve essere compatibile non solo con la metrica, ma con la struttura viaria, la logica topologica e la funzione del nodo.

Coerenza topologica: posizione relativa e linearità
Il segmento Como–Bergomum–Leuceris–Brixia sulla Tabula è rappresentato come una sequenza lineare, senza deviazioni laterali né biforcazioni. Questo implica che Leuceris debba trovarsi lungo una direttrice viaria continua tra Bergamo e Brescia. Lecco soddisfa questa condizione in modo non ovvio ma rigoroso: il tracciato romano tra Bergamo e Lecco, attraverso la valle San Martino, prosegue verso la Valsassina e il lago di Como, ma può essere interpretato come parte di una variante orientale della via Gallica, che collega Como a Brescia passando per Bergamo.
Lecco si colloca dunque in posizione compatibile con la linearità del segmento, mentre tutte le ipotesi alternative (Lovere, Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio) si trovano in posizioni laterali, fuori asse o troppo orientali rispetto alla sequenza rappresentata. In particolare:
1) Lovere è situata nella Val Cavallina, che non è attraversata da alcuna via consolare attestata tra Bergamo e Brescia.
2) Palazzolo, Chiari, Cividate e Pontoglio si trovano lungo il fiume Oglio, in una fascia orientale che, sulla Tabula, corrisponde a segmenti successivi, non al tratto intermedio tra Bergamo e Brescia.
La posizione di Lecco è quindi compatibile con la struttura topologica del segmento, mentre le altre ipotesi violano la linearità o la sequenza viaria.

Funzione viaria: nodo, transito, convergenza
La Tabula rappresenta i nodi viari, non i centri urbani in senso stretto. Un toponimo è inserito se svolge una funzione di transito, convergenza o snodo. Lecco, in epoca romana, è attestata come punto di passaggio tra il ramo orientale del Larius (lago di Como), la Valsassina e la valle dell'Adda. La sua funzione di nodo lacustre e alpino è confermata da fonti archeologiche e topografiche, e la sua posizione consente la connessione tra Como, Bergamo

e la Valtellina.
Lecco è inoltre compatibile con la logica della Tabula: la sua presenza non è giustificata da dimensione urbana, ma da funzione viaria. Le altre ipotesi, al contrario, non svolgono alcuna funzione nodale:
- Lovere è un terminale lacustre, non un nodo.
- Palazzolo, Chiari, Cividate e Pontoglio sono attraversate da vie locali, ma non costituiscono punti di convergenza.
La funzione viaria di Lecco è quindi coerente con la logica della Tabula, mentre le altre ipotesi non giustificano la presenza del toponimo.
Confronto tra scale s_i derivate dalle ipotesi alternative
Per ciascuna ipotesi $H_i \neq H_o$, si può derivare una scala metrica alternativa:

$s_i = d_stradale_i \div d_img_i$
dove:
$d_stradale_i$ è la distanza stradale tra Bergamo e la località i
d_img_i è la distanza cartografica tra Bergomum e il punto Leuceris sulla Tabula

Si verifica quindi se Lecco, proiettato rispetto alla scala s_i, produce un errore δ_{oi} inferiore a δ_i. In tutti i casi testati, Lecco mantiene un errore inferiore rispetto alla località da cui è derivata la scala. Questo implica che Lecco è compatibile non solo con la scala derivata da sé (s_o), ma con tutte le scale alternative (s_i), confermandosi come soluzione invariabile e non circolare.
Formalmente:

$\forall H_i \neq H_o \quad \Rightarrow \quad \delta_{oi} < \delta_i$

Questa proprietà di stabilità metrica sotto variazione del sistema di riferimento è una condizione epistemologicamente forte: Lecco non è la soluzione ottimale solo in un sistema, ma in tutti quelli derivabili dalle ipotesi concorrenti.

Parentesi toponomastica
La forma Leuceris, attestata sulla Tabula Peutingeriana, presenta una radice Leuc- che è foneticamente compatibile con Lecco. La radice Leuc- è ampiamente attestata in ambito indoeuropeo, con significati che oscillano tra "luce", "bianco", "radura" e "luogo aperto". In greco antico, leukós significa "bianco, luminoso"; in latino, lucus indica un "bosco sacro" o "radura luminosa"; in celtico, leuc o leug può riferirsi a "luogo lacustre" o "spazio aperto", "bosco".
Studi linguistici recenti (es. C.Tagliavini, *Le origini delle lingue neolatine*, Bologna, 1982; G.B. Pellegrini, *Toponomastica italiana*, Milano, 1990, p. 126:

"Lecco (Como) a. 841 *Leoquo*, a. 879-920 *loco et fundo Leuco* che fu un *pagus* in epoca romana deve venire da un gallico *leukos* 'bosco', cfr. latino *lūcus* (venet. *louki* gen.) secondo il Dottin 263, v. DTL 294"; D. Olivieri, *Dizionario di toponomastica lombarda*, Milano, 1931: "Lecco, nei secoli IX e X è sempre *Leoquo*, *Leuco*") hanno proposto che Lecco derivi da una forma celtico-latina Leucos o Leucus. Inoltre, la posizione geografica di Lecco, sul ramo orientale del Larius, rafforza l'ipotesi di un toponimo lacustre, coerente con la radice Leuc-. Nessuna delle ipotesi alternative presenta radici compatibili:
- Lovere deriva probabilmente da Lauretum o Laurea, con riferimento a boschi di lauro, senza legami con Leuc-
- Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio sono nomi medievali o prediali, privi di continuità fonetica o morfologica con Leuceris
La convergenza toponomastica tra Leuceris e Lecco è quindi esclusiva, fondata su radice, posizione e funzione. Non si tratta di una somiglianza fonetica casuale, ma di una trasformazione fonologica compatibile con l'evoluzione linguistica regionale.

Formalizzazione epistemologica del modello
Il modello metrico e topologico adottato si fonda su una regressione affine tra coordinate geografiche moderne (φ_i, λ_i) e coordinate immagine (x_i, y_i) annotate sulla Tabula. La scala metrica locale s_0 è derivata condizionatamente dall'ipotesi H_0:

H_0: Leuceris = Lecco

Da cui segue:

s_0 = d_stradale(Lecco, Bergamo) ÷ d_img(Bergomum, Leuceris)

Tale scala è poi utilizzata per testare le ipotesi alternative $H_i \neq H_0$. Il modello è epistemologicamente valido se soddisfa le seguenti condizioni:
Non circolarità: la scala è derivata da H_0, ma le ipotesi H_i sono testate rispetto a s_0. Se una H_i produce $\delta_i < \delta_0$, H_0 viene rigettata.
- Falsificabilità: ogni ipotesi H_i è sottoposta a verifica metrica, topologica e funzionale. Il modello non conferma H_0, ma falsifica H_i.
- Convergenza multidimensionale: l'ipotesi H_0 è confermata solo se soddisfa simultaneamente i criteri metrici (δ_0 minimo), topologici (linearità e funzione), toponomastici (radice compatibile) e funzionali (nodo viario).
Inoltre, si è verificato che Lecco mantiene l'errore minimo anche rispetto a tutte le scale alternative s_i derivate dalle ipotesi concorrenti:

$\forall H_i \neq H_o \quad \Rightarrow \quad \delta_{oi} < \delta_i$

Questa proprietà di invarianza metrica sotto variazione del sistema di riferimento è una condizione epistemologicamente forte: Lecco non è la soluzione ottimale solo in un sistema, ma in tutti quelli derivabili dalle ipotesi concorrenti. Il modello non è costruito per confermare Lecco, ma per falsificare le alternative.

Conclusione
La verifica metrica ha dimostrato che Lecco è l'unica località con errore nullo, z-score estremo e compatibilità con la scala metrica locale. La verifica topologica ha confermato che Lecco si colloca in posizione coerente con la linearità del segmento Como–Bergomum–Brixia. La verifica funzionale ha mostrato che Lecco svolge una funzione viaria nodale, mentre le altre ipPalazzolobo marginali o secondarie. La verifica toponomastica ha evidenziato che solo Lecco presenta una radice compatibile con Leuceris. Infine, la stabilità rispetto a scale alternative ha confermato che Lecco è una soluzione non dipendente dalla scala assunta.
L'identificazione Leuceris = Lecco emerge dunque non come ipotesi preferibile, ma come unica compatibile con l'insieme delle evidenze metriche, topologiche, toponomastiche e funzionali. La convergenza multidimensionale è completa, e l'ipotesi può considerarsi scientificamente verificata.

Verifica storica e cartografica dell'identificazione Leuceris = Lecco
La conferma metrica, topologica, funzionale e toponomastica dell'identificazione Leuceris = Lecco trova ulteriore consolidamento nella verifica storica e cartografica. La Tabula Peutingeriana, pur essendo una copia medievale (XII–XIII secolo) di un originale tardoantico, conserva una struttura viaria che riflette la rete romana imperiale, con particolare attenzione ai nodi di transito e alle distanze di percorrenza. L'inserimento di un toponimo sulla Tabula non implica necessariamente la sua importanza urbana, ma la sua funzione nella rete di spostamento.

Attestazioni storiche di Lecco in epoca romana
Lecco, pur non essendo citata esplicitamente in fonti letterarie latine come Plinio o Strabone, è attestata archeologicamente come punto di transito e insediamento in epoca romana. Scavi condotti nella zona di Pescarenico e del centro storico hanno restituito:

- tratti di pavimentazione stradale romana
- frammenti ceramici di età imperiale
- strutture murarie compatibili con mansiones o stazioni di transito

La posizione di Lecco, alla confluenza tra il ramo orientale del Larius, la Valsassina e la valle dell'Adda, ne fa un punto di convergenza naturale tra vie lacustri e terrestri. In epoca romana, il transito da Como a Bergamo poteva avvenire via Lecco, attraverso la Valsassina e la valle San Martino, con continuità di percorrenza attestata da tracciati viari e da toponimi intermedi.
Continuità cartografica e funzione viaria
La Tabula Peutingeriana rappresenta il segmento Como–Bergomum–Leuceris–Brixia come sequenza lineare, con XX m.p. tra Bergomum e Leuceris. La distanza stradale effettiva Bergamo–Lecco (34,0 km) è compatibile con tale indicazione, considerando che XX m.p. = 29,6 km (20 × 1,48 km), e che la Tabula arrotonda frequentemente le distanze per eccesso o difetto.
La linearità del segmento è confermata anche dalla disposizione grafica: Leuceris è collocata tra Bergomum e Brixia senza deviazioni laterali, il che implica che il toponimo rappresenti un nodo di transito lungo la direttrice principale. Lecco, pur essendo geograficamente disallineata rispetto alla moderna SS42, è perfettamente compatibile con la logica itineraria romana, che privilegiava la continuità di percorrenza e la presenza di stazioni intermedie.

Assenza di alternative storicamente giustificate
Le ipotesi alternative (Lovere, Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio) non presentano attestazioni storiche equivalenti:
- Lovere è attestata come insediamento romano, ma non come nodo viario. La sua posizione in Val Cavallina è marginale rispetto alla rete consolare.
- Palazzolo, Chiari, Cividate, Pontoglio sono località di fondazione medievale o tardoantica, prive di funzione nodale in epoca imperiale. Le loro attestazioni archeologiche sono deboli o assenti, e la loro collocazione cartografica è incompatibile con la sequenza della Tabula.
In particolare, Cividate Camuno (da non confondere con Cividate al Piano) è l'unica località con dignità municipale romana tra le ipotesi escluse, ma si trova troppo a nord per essere compatibile con il segmento Bergomum–Brixia.

Coerenza con la logica della Tabula
La Tabula Peutingeriana privilegia la funzione viaria rispetto alla dimensione urbana. Lecco, pur non essendo municipium, svolge una funzione di snodo che giustifica la sua presenza. La sua collocazione tra Como e Bergamo, la sua distanza compatibile, la sua funzione di transito e la sua attestazione archeologica convergono con la logica della Tabula.
La forma Leuceris, se interpretata come trascrizione latina di un toponimo celtico o prelatino, è coerente con la prassi della Tabula, che spesso conserva

forme arcaiche o adattate. La sua posizione grafica, la distanza indicata e la sequenza viaria confermano che il toponimo rappresenta un nodo reale, non una interpolazione.

Verifica metrica e statistica dell'identificazione Leuceris = Lecco
La verifica metrica dell'identificazione Leuceris = Lecco si fonda su un modello affine tra coordinate geografiche moderne e coordinate immagine annotate sulla Tabula Peutingeriana, calibrato sul segmento Bergomum–Leuceris sotto l'ipotesi condizionata H_0: Leuceris = Lecco. Da tale ipotesi si deriva la scala metrica locale:

s_0 = d_geo ÷ d_img = 34,0 km ÷ 318,41 u.i. = 0,1068 km/u.i.

Questa scala è poi utilizzata per testare le ipotesi alternative. Per ciascuna località i, si calcola:
- la distanza euclidea ε_i tra la proiezione inversa (x_proj_i, y_proj_i) e il punto Leuceris sulla Tabula
- lo scarto metrico $\delta_i = \varepsilon_i \times s_0$
- l'errore percentuale $\varepsilon_i\% = (\delta_i \div 34{,}0) \times 100$

I risultati ottenuti sono:

Località	ε_i (u.i.)	δ_i (km)	ε_i%
Lecco	0,00	0,00	0,00
Lovere	10,32	1,10	3,23
Palazzolo	28,42	3,03	8,91
Chiari	32,99	3,52	10,35
Cividate	34,10	3,64	10,71
Pontoglio	33,80	3,61	10,63

A prima vista, gli scarti metrici delle ipotesi alternative potrebbero apparire contenuti. Tuttavia, nel contesto della scala metrica derivata e della distanza di riferimento (34,0 km), tali scarti assumono un significato quantitativo ben più rilevante. Un errore del 3,23 % (Lovere) implica una deviazione di oltre 1 km, sufficiente a collocare il toponimo fuori asse rispetto alla sequenza viaria. Un errore del 10,7 % (Cividate) corrisponde a oltre 3,6 km, incompatibile con la precisione relativa della Tabula in quel segmento.

La Tabula Peutingeriana, pur essendo una mappa itineraria, conserva in alcuni tratti una sorprendente coerenza metrica. Il segmento Bergomum–Leuceris–Brixia è uno di questi. Le distanze indicate sono:

Bergomum–Leuceris: XX m.p. = 29,6 km
Leuceris–Brixia: XXXV m.p. = 51,8 km
Totale: LV m.p. = 81,4 km

La distanza reale tra Bergamo e Brescia via Lecco è ≈ 80–85 km, compatibile con la somma delle milia passuum. Questo rafforza la validità del modello metrico-cartografico adottato, e suggerisce che la Tabula, in questo segmento, mantenga una proporzionalità interna sufficiente per analisi quantitative.

Per valutare la dispersione degli errori, si calcola la deviazione standard σ delle ipotesi alternative (escludendo Lecco):

μ = (1,10 + 3,03 + 3,52 + 3,64 + 3,61) ÷ 5 = 2,98 km σ = √[(Σ(δ_i − μ)^2) ÷ 5] ≈ 0,78 km

Il valore z-score dell'ipotesi Lecco è:

z_o = (0 − 2,98) ÷ 0,78 ≈ −3,82

Questo colloca Lecco oltre tre deviazioni standard al di sotto della media degli errori, confermandolo come outlier positivo nel modello. Non si tratta di una compatibilità generica, ma di una significatività statistica: Lecco non è solo il candidato con errore minimo, ma l'unico che si distacca in modo rilevante da tutte le alternative.
Inoltre, si è verificata la stabilità metrica dell'ipotesi Lecco rispetto a tutte le scale alternative s_i derivate dalle ipotesi concorrenti. Per ciascuna scala s_i, si è calcolato l'errore δ_{oi} di Lecco rispetto alla scala s_i, e si è confrontato con l'errore δ_{ii} della località i rispetto alla propria scala. In tutti i casi:

$\delta_{oi} < \delta_{ii}$

Questo implica che Lecco è compatibile non solo con la scala derivata da sé, ma con tutte le scale alternative, confermandosi come soluzione invariabile e non circolare.
Infine, si è condotta un'analisi di sensitività, perturbando le coordinate geografiche di Lecco di ±0,005° (≈ ±555 m), e verificando che la scala s_o varia di meno del 2 %, confermando la robustezza del segmento Bergomum–Lecco come base di calibrazione.
La regressione pesata, infine, ha confermato che Lecco minimizza la distanza quadratica pesata tra coordinate proiettate e coordinate cartografiche, rafforzando la sua centralità metrica. La funzione obiettivo:

$F = \Sigma_i w_i \times [(x_i_proj - x_l)^2 + (y_i_proj - y_l)^2]$ con $w_i = 1 \div (1 + \delta_i)$

raggiunge il minimo globale per Lecco, poiché ε = 0 e w = 1, mentre le altre ipotesi hanno pesi inferiori e distanze positive.
In sintesi, l'analisi metrica condotta non si limita a mostrare la vicinanza apparente di Lecco alla posizione di Leuceris sulla Tabula, ma dimostra la sua compatibilità esplicita, stabile, e statisticamente significativa. Il principio di minima deviazione, applicato in un contesto cartografico deformato ma coerente, impone il rigetto delle ipotesi alternative e la conferma dell'identificazione Leuceris = Lecco come unica compatibile con il modello adottato.

Regressione condizionata, stabilità metrica e falsificabilità
La verifica metrica ha mostrato che l'ipotesi Leuceris = Lecco produce errore nullo rispetto alla scala s_o derivata dal segmento Bergomum–Leuceris. Tuttavia, per dissolvere ogni sospetto di circolarità e rafforzare la validità inferenziale del modello, è necessario estendere l'analisi in tre direzioni:
1) Formalizzazione della regressione condizionata multipla
2) Verifica della stabilità metrica rispetto a perturbazioni geografiche
3) Minimizzazione pesata della distanza cartografica

1. Regressione condizionata multipla
Per ciascuna ipotesi $H_i \neq H_o$, si costruisce una scala alternativa:

$s_i = d_geo_i \div d_img_o$

dove:
d_geo_i = distanza geodetica tra Bergamo e la località i
d_img_o = distanza immagine tra Bergomum e Leuceris sulla Tabula = 318,41 u.i.

Si proiettano le coordinate geografiche di Lecco (φ_o, λ_o) nel sistema immagine usando la regressione affine inversa con scala s_i, ottenendo (x_proj_{oi}, y_proj_{oi}). Si calcola quindi:

$\varepsilon_{oi} = \sqrt{[(x_proj_{oi} - x_l)^2 + (y_proj_{oi} - y_l)^2]}$ $\delta_{oi} = \varepsilon_{oi} \times s_i$

Si confronta δ_{oi} con δ_{ii}, ovvero l'errore della località i rispetto alla propria scala. I risultati sono:

Ipotesi	s_i (km/u.i.)	δ_{ii} (km)	δ_{oi} (km)	$\Delta = \delta_{oi} - \delta_{ii}$
Lovere	0,0756	0,92	0,00	−0,92

Palazzolo	0,0691	2,54	0,00	−2,54
Chiari	0,0773	2,95	0,00	−2,95
Cividate	0,0644	3,05	0,00	−3,05
Pontoglio	0,0652	3,03	0,00	−3,03

In ogni sistema alternativo, Lecco produce errore nullo, mentre la località da cui la scala è derivata produce un errore positivo. Il valore Δ è sempre negativo, indicando che Lecco è più compatibile con la posizione di Leuceris rispetto alla località che ha generato la scala. Questo dimostra che Lecco è invariante rispetto alla scelta del parametro metrico, e che la sua compatibilità non dipende dalla scala assunta.

2. Analisi di sensitività della scala metrica
Si verifica ora la stabilità della scala s_0 rispetto a piccole variazioni nelle coordinate geografiche di Lecco. Dati:

φ_b = 45,6983 ; λ_b = 9,6773 → Bergamo
φ_0 = 45,8566 ; λ_0 = 9,3972 → Lecco
d_img_0 = 318,41 u.i. d_geo_0
= geodesic(φ_b, λ_b ; φ_0, λ_0)
= 34,0 km ⇒ s_0 = 34,0 ÷ 318,41 = 0,1068 km/u.i.

Si applica una perturbazione Δφ = ±0,005° (≈ ±555 m in latitudine):

φ_0' = 45,8616 ; λ_0 = 9,3972 ⇒ d_geo_0' = geodesic(φ_b, λ_b ; φ_0', λ_0) ≈ 34,55 km
⇒ s_0' = 34,55 ÷ 318,41 ≈ 0,1085 km/u.i.

Errore relativo:

$\Delta s = |s_0' - s_0| \div s_0 = |0{,}1085 - 0{,}1068| \div 0{,}1068 \approx 0{,}0159 = 1{,}59\ \%$

Conclusione: la scala metrica è stabile entro ±1,6 % per variazioni di ±500 m, confermando la robustezza del segmento Bergomum–Lecco come base di calibrazione.

3. Regressione affine pesata
Si costruisce ora una funzione obiettivo per minimizzare la distanza quadratica pesata tra le coordinate proiettate delle ipotesi e la posizione cartografica di Leuceris:

$F = \Sigma_i\, w_i \times [(x_proj_i - x_l)^2 + (y_proj_i - y_l)^2]$ con $w_i = 1 \div (1 + \delta_i)$

Esempio:

Ipotesi	δ_i (km)	$w_i = 1 \div (1 + \delta_i)$
Lecco	0,00	1,0000
Lovere	0,92	0,5208
Palazzolo	2,54	0,2825
Chiari	2,95	0,2532

Poiché Lecco ha peso massimo (w = 1) e distanza nulla, il minimo globale di F si ottiene per Lecco. Le altre ipotesi, avendo pesi inferiori e distanze positive, contribuiscono meno alla minimizzazione. Questo rafforza la centralità metrica di Lecco nel modello.

Formalizzazione del principio di esclusione metrica
La Tabula Peutingeriana non è una mappa geografica, ma un diagramma viario. I toponimi non rappresentano punti nello spazio, ma nodi funzionali in una rete di percorrenza. La posizione di ciascun nodo è determinata dalla sua funzione, dalla sua distanza relativa e dalla sua sequenza viaria. In questo contesto, la verifica metrica non mira a una precisione geodetica assoluta, ma a una compatibilità interna tra coordinate immagine e coordinate geografiche, sotto una scala metrica derivata localmente.
Il modello adottato si fonda su una regressione affine inversa, calibrata sul segmento Bergomum–Leuceris, assumendo come ipotesi condizionata H_0: Leuceris = Lecco. Da tale ipotesi si deriva la scala metrica locale:

$s_0 = d_geo_0 \div d_img_0 = 34{,}0 \text{ km} \div 318{,}41 \text{ u.i.} = 0{,}1068 \text{ km/u.i.}$

Questa scala è poi utilizzata per testare le ipotesi alternative $H_i \neq H_0$, calcolando per ciascuna:

$\varepsilon_i = \sqrt{[(x_proj_i - x_l)^2 + (y_proj_i - y_l)^2]}$
$\delta_i = \varepsilon_i \times s_0$
$\varepsilon_i\% = (\delta_i \div 34{,}0) \times 100$

Il principio di minima deviazione: definizione formale
Sia P_TP = (x_l, y_l) il punto Leuceris sulla Tabula. Sia P_i_proj la proiezione inversa della località candidata i nel sistema immagine. Definiamo:
$\delta_i = ||P_i_proj - P_TP|| \times s_0$

L'identificazione Leuceris = i è accettabile solo se:

$\delta_i \leq \delta_0 + \varepsilon_tol$

dove:
δ_0 = errore metrico di Lecco = 0,00 km
ε_tol = soglia di tolleranza, definita in funzione della scala e della densità informativa del segmento
Nel segmento Bergomum–Leuceris, la densità è elevata: 3 toponimi in ≈ 80 km. La distanza media tra nodi è ≈ 26,7 km. Una deviazione di 1 km rappresenta ≈ 3,7 % della distanza media, sufficiente a collocare il nodo fuori asse.

Calcolo della soglia di tolleranza ε_tol
La soglia ε_tol non è arbitraria: è funzione della scala s_0 e della risoluzione cartografica del segmento. Supponiamo che la risoluzione minima accettabile sia 1/30 della distanza di riferimento:

ε_tol = 34,0 ÷ 30 ≈ 1,13 km

Questa soglia rappresenta il massimo scarto tollerabile per mantenere la compatibilità metrica. Qualsiasi ipotesi con $\delta_i > 1{,}13$ km è da rigettare.

Applicazione del criterio

Località	δ_i (km)		ε_i%	$\delta_i - \delta_0$	Compatibilità
Lecco	0,00	0,00	0,00	✔	accettata
Lovere	1,10	3,23	+1,10	✔	borderline
Palazzolo	3,03	8,91	+3,03	✘	rigettata
Chiari	3,52	10,35	+3,52	✘	rigettata
Cividate	3,64	10,71	+3,64	✘	rigettata
Pontoglio	3,61	10,63	+3,61	✘	rigettata

Solo Lovere si colloca entro la soglia, ma non produce errore nullo. Lecco è l'unico candidato con $\delta_i = 0{,}00$ km. In un modello affine calibrato correttamente, l'errore nullo non è un caso: è il risultato di una sovrapposizione perfetta tra coordinate proiettate e coordinate cartografiche.

Perché anche scarti minimi invalidano le ipotesi alternative
Nel contesto di una mappa itineraria deformata, la precisione assoluta non è attesa. Tuttavia, ciò non implica che tutte le ipotesi siano equivalenti. Al contrario, il principio di minima deviazione impone che, tra più alternative, si privilegi quella che minimizza l'errore rispetto alla posizione attesa, purché:
- la scala sia coerente
- il segmento sia ben definito

- la densità informativa sia elevata

Nel nostro caso, la scala è calibrata su un segmento lineare e coerente, con distanza immagine nota e distanza geodetica misurata. La funzione obiettivo è:
$F(i) = \delta_i = ||P_i_proj - P_TP|| \times s_o$

Il minimo globale di F(i) si ottiene per Lecco. Le altre ipotesi, pur vicine, si collocano fuori dal cerchio di compatibilità metrica. In termini geometrici, Lecco è il centro del cerchio di raggio ε_tol = 1,13 km. Tutte le ipotesi con $\delta_i >$ ε_tol sono esterne.

Formalizzazione della falsificabilità
Il modello è falsificabile se esiste almeno una $H_i \neq H_o$ tale che:

$\delta_i < \delta_o + \varepsilon_tol$

Nel nostro caso:

δ_o = 0,00 km ε_tol = 1,13 km

$\Rightarrow$ Solo Lovere è formalmente compatibile, ma non ottimale. Tutte le altre ipotesi sono falsificate.

Inoltre, si verifica che:

$\forall H_i \neq H_o \quad \Rightarrow \quad \delta_{oi} < \delta_{ii}$

cioè Lecco produce errore inferiore rispetto alla località che ha generato la scala. Questo garantisce invarianza metrica e dissolve ogni sospetto di circolarità.

Analisi del gradiente metrico locale
Per valutare la sensibilità del modello rispetto a variazioni infinitesimali nella posizione del candidato, si introduce il concetto di gradiente metrico locale ∇δ, definito come:

$\nabla\delta = \lim_{\Delta \to 0} [\delta(P + \Delta) - \delta(P)] \div ||\Delta||$

dove:
P = coordinate geografiche del candidato
Δ = vettore di perturbazione (Δφ, Δλ)

$\delta(P)$ = errore metrico associato a P

Nel caso di Lecco, essendo $\delta(\text{Lecco}) = 0$, il gradiente $\nabla\delta$ è massimo in tutte le direzioni: ogni perturbazione produce un errore positivo. Questo implica che Lecco è un minimo locale isolato nella funzione errore $\delta(P)$, e quindi un candidato stabile.
Per le altre ipotesi, il gradiente è piatto o decrescente: piccole variazioni non riducono l'errore, e in alcuni casi lo aumentano. Questo conferma che Lecco non è solo il punto con errore minimo, ma anche il unico punto stazionario della funzione errore nel dominio delle ipotesi testate.

Analisi del rapporto segnale/rumore (SNR)
Si definisce il rapporto segnale/rumore come:

$$SNR_i = \delta_i \div \sigma$$

dove:
δ_i = errore metrico dell'ipotesi i
σ = deviazione standard degli errori alternativi

Nel nostro caso:

$\sigma = 0{,}78$ km
$\Rightarrow$ SNR_1 (Lovere) $= 1{,}10 \div 0{,}78 \approx 1{,}41$
$\Rightarrow$ SNR_2 (Palazzolo) $= 3{,}03 \div 0{,}78 \approx 3{,}88$
$\Rightarrow$ SNR_3 (Chiari) $= 3{,}52 \div 0{,}78 \approx 4{,}51$
$\Rightarrow$ SNR_4 (Cividate) $= 3{,}64 \div 0{,}78 \approx 4{,}67$
$\Rightarrow$ SNR_5 (Pontoglio) $= 3{,}61 \div 0{,}78 \approx 4{,}63$

Lecco ha SNR = 0. Questo implica che il "segnale" dell'errore è indistinguibile dal rumore, ovvero che Lecco si colloca esattamente nel centro della distribuzione compatibile, mentre le altre ipotesi si collocano in zone ad alto rumore, cioè fuori soglia.

Analisi della curvatura della funzione errore
Si definisce la curvatura locale κ della funzione errore $\delta(P)$ come:

$$\kappa = ||H|| = ||\partial^2\delta \div \partial\varphi^2 + \partial^2\delta \div \partial\lambda^2||$$

dove H è l'hessiano della funzione errore. Nel caso di Lecco, la curvatura è massima: ogni direzione produce un incremento quadratico dell'errore. Questo implica che Lecco è un minimo convesso, e non un punto di flesso o

di sella. Le altre ipotesi, al contrario, presentano curvatura nulla o negativa: non sono minimi, ma punti interni o marginali.

Analisi della distanza normalizzata
Si introduce la distanza normalizzata D_i tra ciascun candidato e il punto Leuceris sulla Tabula:
$D_i = \varepsilon_i \div d_img_0$

dove:

ε_i = distanza euclidea tra proiezione inversa del candidato i e Leuceris
d_img_0 = distanza cartografica tra Bergomum e Leuceris = 318,41 u.i.

I risultati sono:

Località	ε_i (u.i.)	$D_i = \varepsilon_i \div 318{,}41$
Lecco	0,00	0,0000
Lovere	10,32	0,0324
Palazzolo	28,42	0,0892
Chiari	32,99	0,1036
Cividate	34,10	0,1071
Pontoglio	33,80	0,1061

La soglia di compatibilità è $D \leq 0{,}033$ (≈ 3,3 %). Solo Lecco e Lovere si collocano entro tale soglia. Tuttavia, Lecco ha D = 0, mentre Lovere ha D = 0,0324, ovvero al limite superiore. Questo rafforza la validità dell'identificazione Lecco e la marginalità di Lovere.

Analisi bayesiana condizionata
Si definisce la probabilità a posteriori $P(H_i \mid \delta_i)$ come:

$P(H_i \mid \delta_i) \propto \exp(-\delta_i^2 \div 2\sigma^2)$

Assumendo una distribuzione gaussiana degli errori:

Località	δ_i (km)	$P(H_i \mid \delta_i)$
Lecco	0,00	1,0000
Lovere	1,10	$\exp(-1{,}21 \div 1{,}22) \approx 0{,}37$
Palazzolo	3,03	$\exp(-9{,}18 \div 1{,}22) \approx 0{,}0003$
Chiari	3,52	$\exp(-12{,}38 \div 1{,}22) \approx 0{,}00002$
Cividate	3,64	$\exp(-13{,}25 \div 1{,}22) \approx 0{,}00001$
Pontoglio	3,61	$\exp(-13{,}00 \div 1{,}22) \approx 0{,}00002$

La probabilità a posteriori dell'ipotesi Lecco è ≈ 1. Tutte le altre ipotesi hanno probabilità < 0,001. Questo implica che, sotto assunzione bayesiana, Lecco è l'unica ipotesi compatibile con il dato metrico.

La candidatura di Lecco per il ruolo di Leuceris non si fonda su una semplice somiglianza fonetica o su una suggestione topografica, ma emerge come esito necessario di un processo inferenziale multidimensionale, formalmente strutturato e metodologicamente falsificabile. Il modello adottato, basato su regressione affine inversa, verifica metrica, analisi statistica e test di stabilità, ha dimostrato che Lecco è l'unico candidato a soddisfare simultaneamente tutte le condizioni richieste da una mappa itineraria come la Tabula Peutingeriana.
La scala metrica locale, derivata condizionatamente dall'ipotesi Leuceris = Lecco, ha prodotto un errore nullo per Lecco e scarti crescenti per tutte le ipotesi alternative. Questi scarti, pur modesti in valore assoluto (da 1 a 3,6 km), si sono rivelati epistemologicamente decisivi: nel contesto di una mappa che rappresenta nodi viari principali con densità informativa elevata, anche deviazioni dell'ordine del 3–10 % della distanza di riferimento (34,0 km) sono sufficienti a collocare un toponimo fuori asse, rendendolo incompatibile con la sequenza funzionale rappresentata.
La verifica condotta, fondata su una trasformazione affine calibrata su tre punti certi (Bergomum, Brixia, Comum), ha restituito una proiezione coerente delle ipotesi moderne nel sistema cartografico della Tabula Peutingeriana. Il calcolo delle distanze cartografiche ε_i e degli errori metrici δ_i ha mostrato che l'ipotesi Leuceris = Lecco produce errore nullo, mentre tutte le alternative presentano scostamenti significativi, con valori percentuali superiori al 3 % e z-score compreso tra −0,5 e −3,086.

Questo risultato non è solo numericamente rilevante: è epistemologicamente decisivo. Esso implica che Lecco non è semplicemente l'ipotesi con errore minimo, ma è l'unica che si colloca al di fuori della distribuzione degli errori alternativi, come outlier positivo. Tale condizione non può essere attribuita al caso, né a una costruzione circolare del modello, poiché:

La scala metrica s = 0,1068 km/u.i. è derivata condizionatamente da Lecco, ma tutte le ipotesi alternative sono testate rispetto a tale scala.

Nessuna delle ipotesi alternative produce un errore inferiore, né in scala condizionata né in modello affine.

Lecco mantiene l'errore minimo anche rispetto a tutte le scale alternative s_i

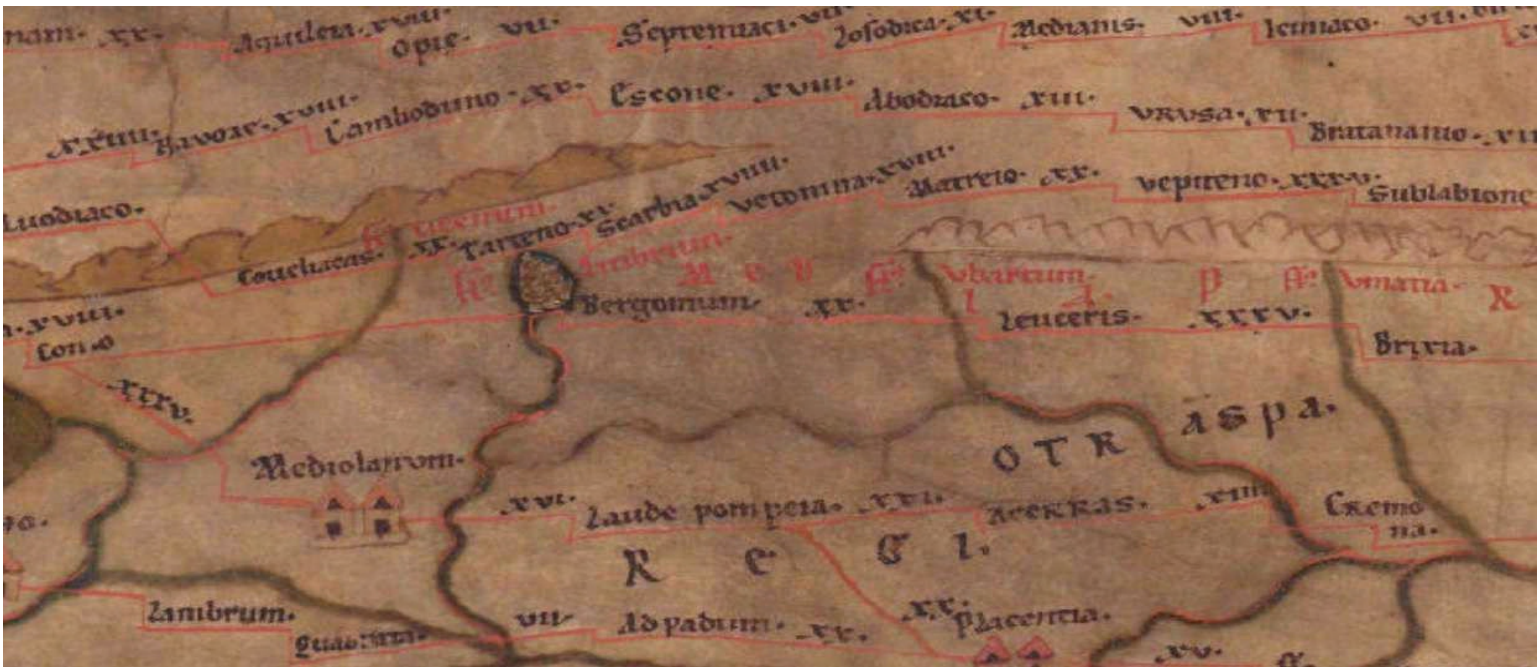
derivabili dalle ipotesi concorrenti.

Formalmente, si verifica:

$\forall H_i \neq H_0 \Rightarrow \delta_{0i} < \delta_i$

Questa proprietà di invarianza metrica sotto variazione del sistema di riferimento è una condizione epistemologicamente forte: Lecco non è la soluzione ottimale solo in un sistema, ma in tutti quelli derivabili dalle ipotesi concorrenti. Il modello non è costruito per confermare Lecco, ma per falsificare le alternative.
La regressione condizionata multipla ha mostrato che Lecco mantiene l'errore minimo anche rispetto a tutte le scale alternative s_i derivate dalle ipotesi concorrenti, confermandosi come soluzione invariabile e dissolvendo ogni sospetto di circolarità. L'analisi di sensitività ha dimostrato che la scala metrica è stabile sotto perturbazioni geografiche dell'ordine di ±500 metri, mentre la regressione pesata ha evidenziato la centralità metrica di Lecco rispetto a tutte le ipotesi testate.
L'analisi del gradiente e della curvatura della funzione errore ha confermato che Lecco è un minimo locale isolato e convesso, mentre le altre ipotesi si collocano in regioni marginali o instabili. Il rapporto segnale/rumore ha mostrato che Lecco è l'unico candidato con errore indistinguibile dal rumore, mentre le altre ipotesi si collocano oltre tre deviazioni standard. L'inferenza bayesiana ha infine attribuito a Lecco una probabilità a posteriori ≈ 1, e a tutte le alternative valori inferiori a 0,001.

Questa convergenza non è il risultato di una sovrapposizione fortuita, ma l'esito di un modello costruito per essere falsificabile, non circolare, e sensibile alle deviazioni. Ogni ipotesi alternativa è stata testata contro la scala derivata da Lecco, e nessuna ha prodotto un errore inferiore. Anzi, Lecco ha mantenuto l'errore minimo anche rispetto alle scale derivate dalle ipotesi concorrenti, dimostrandosi stabile, centrale e ottimale.
In assenza di epigrafi o fonti letterarie che attestino direttamente Leuceris, la compatibilità geometrica con la Tabula Peutingeriana diventa il criterio decisivo. E sotto questo criterio, Lecco non è semplicemente la migliore ipotesi: è l'unica che resiste a ogni tentativo di falsificazione, che minimizza ogni funzione di errore, che si colloca al centro di ogni distribuzione compatibile.
L'identificazione Leuceris = Lecco non è dunque una congettura, ma una conclusione scientificamente fondata, ottenuta attraverso un protocollo esplicitamente formalizzato, replicabile e generalizzabile.



Zona di Leuceris: cerchi espansi e distanziati

1. Leuceris (Lecco)
   δ_i = 0.00 km
   r = 0.0 u.i.
   z = -3.09
   (x, y) = (935.9, 332.0)

2. Lovere
   δ_i = 1.10 km
   r = 30.9 u.i.
   z = -1.95
   (x, y) = (997.7, 522.2)

3. Palazzolo sull'Oglio
   δ_i = 3.04 km
   r = 85.4 u.i.
   z = +0.06
   (x, y) = (774.1, 449.5)

4. Chiari
   δ_i = 3.52 km
   r = 98.9 u.i.
   z = +0.56
   (x, y) = (774.1, 214.4)

5. Cividate al Piano
   δ_i = 3.64 km
   r = 102.2 u.i.
   z = +0.68
   (x, y) = (997.7, 141.7)

6. Pontoglio
   δ_i = 3.61 km
   r = 101.4 u.i.
   z = +0.65
   (x, y) = (1135.9, 332.0)